Courbes de transition

Soit $\mathcal{C}$ une courbe régulière dans $\mathbb{R}^n$ et soit $\tilde{\boldsymbol{r}}(s)$ une paramétrisation par l'abscisse curviligne. Alors $\tilde{\boldsymbol{r}}''(s)$ est un vecteur normal à la courbe $\mathcal{C}$ appelé vecteur de courbure et $\tilde{\kappa}(s) := ||\tilde{\boldsymbol{r}}''(s)||$ est la courbure.
Soit $\boldsymbol{r}(u)$ une paramétrisation de $\mathcal{C}$ définie sur un intervalle I telle que $\boldsymbol{r}'(u) \neq \boldsymbol{0}$ pour tout $u \in I$. Alors il existe une fonction $s(u)$ telle que $\boldsymbol{r}(u) = \tilde{\boldsymbol{r}}(s(u))$ et il en résulte que

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}'(u) &= \tilde{\boldsymbol{r}}'(s(u))s'(u), && (1)\\ \boldsymbol{r}''(u) &= \tilde{\boldsymbol{r}}''(s(u))s'(u)^2 + \tilde{\boldsymbol{r}}'(s(u))s''(u). && (2) \end{aligned}$$

On déduit de (1) que $s'(u)^2 = \boldsymbol{r}'(u) \cdot \boldsymbol{r}'(u)$ et en dérivant on obtient $s'(u)s''(u) = \boldsymbol{r}''(u) \cdot \boldsymbol{r}'(u)$ qui, joint à (1) et (2), conduit à l'expression du vecteur de courbure

$$\boldsymbol{n}(u) = \frac{1}{||\boldsymbol{r}'(u)||^2}\left(\boldsymbol{r}''(u) - \frac{\boldsymbol{r}''(u)\cdot\boldsymbol{r}'(u)}{||\boldsymbol{r}'(u)||^2}\boldsymbol{r}'(u)\right) \qquad (3)$$

et à la courbure

$$\kappa(u) = \frac{\sqrt{||\boldsymbol{r}''(u)||^2||\boldsymbol{r}'(u)||^2 - (\boldsymbol{r}''(u)\cdot\boldsymbol{r}'(u))^2}}{||\boldsymbol{r}'(u)||^3}.$$

On considère maintenant une courbe dans $\mathbb{R}^n$ et, comme dans notre publication, on désigne par $\boldsymbol{p_0}$ et $\boldsymbol{p_1}$ les « points de décollage » et par $\boldsymbol{t_0}$ et $\boldsymbol{t_1}$ les vecteurs tangents unités à la courbe aux points $\boldsymbol{p_0}$ et $\boldsymbol{p_1}$. Comme le vecteur normal unité à une courbe n'est en général pas défini en tout point, il paraît plus judicieux de travailler directement avec les vecteurs de courbure définis par (3) aux points $\boldsymbol{p_0}$ et $\boldsymbol{p_1}$ et notés $\boldsymbol{n_0}$ et $\boldsymbol{n_1}$. Étant donné une matrice A définie positive on considère donc le problème

$$\min_{\boldsymbol{r}(\cdot)} \int_0^1 {}^t\boldsymbol{r}'''(u)A\boldsymbol{r}'''(u)du$$

sous les contraintes

$$\left\{\begin{aligned} \boldsymbol{r}(0) &= \boldsymbol{p_0},\\ \boldsymbol{r}(1) &= \boldsymbol{p_1},\\ \boldsymbol{r}'(0) &= \alpha_0\boldsymbol{t_0} \text{ où } \alpha_0 > 0,\\ \boldsymbol{r}'(1) &= \alpha_1\boldsymbol{t_1} \text{ où } \alpha_1 > 0,\\ \boldsymbol{r}''(0) &= \beta_0\boldsymbol{t_0} + \alpha_0^2\boldsymbol{n_0},\\ \boldsymbol{r}''(1) &= \beta_1\boldsymbol{t_1} + \alpha_1^2\boldsymbol{n_1}. \end{aligned}\right.$$

On démontre comme dans notre publication que les points stationnaires sont à chercher parmi les solutions du système

$$\left\{\begin{aligned} {}^t\boldsymbol{r}'''(0)A\,\boldsymbol{t_0} &= 0,\\ {}^t\boldsymbol{r}'''(1)A\,\boldsymbol{t_1} &= 0,\\ 2\alpha_0{}^t\boldsymbol{r}'''(0)A\,\boldsymbol{n_0} &= {}^t\boldsymbol{r}''''(0)A\,\boldsymbol{t_0},\\ 2\alpha_1{}^t\boldsymbol{r}'''(1)A\,\boldsymbol{n_1} &= {}^t\boldsymbol{r}''''(1)A\,\boldsymbol{t_1}. \end{aligned}\right.$$